ЭКОНОМИКА
И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

1991
Том 27, вып. 4

ЗАМЕТКИ И ПИСЬМА

ДВУХЭТАПНАЯ СТОХАСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ МНОГОМЕРНЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ

Алексеев А.О., Алексеев О.Г., Васильковский С.А.

(Ленинград)

ВВЕДЕНИЕ

Оптимизация многомерных параметрических рядов является одной из основных задач стандартизации изделий и их составных частей [1–3]. Она заключается в следующем: из множества $I = \{1, \ldots, m\}$ типов изделий, которые ограниченно взаимозаменяемы и отличаются друг от друга значениями параметров, требуется выбрать подмножество $\alpha \subseteq I$, причем так, чтобы входящие в него типы изделий удовлетворяли некоторые потребности во множестве видов $J = \{1, \ldots, n\}$ при экстремальном значении определенного критерия оптимальности.

Исходные данные задачи: перечень изделий исходного ряда, их основные параметры, оценки затрат на разработку, производство и эксплуатацию; перечень потребностей и требования к параметрам изделий. До сих пор основное внимание уделялось анализу математических моделей таких задач в детерминированной постановке.

Цель настоящей работы – построение модели оптимизации многомерных параметрических рядов, учитывающей вероятностный характер упомянутых затрат. Предлагаемая модель отражает двухэтапность процедуры выбора оптимального параметрического ряда. На первом этапе (разработки), когда принимается решение о формировании оптимального ряда изделий, все затраты могут быть заданы лишь как случайные величины с определенным законом распределения. При этом точно неизвестно, какие изделия в дальнейшем будут использоваться для удовлетворения потребностей, поскольку их реальная стоимость (после создания) может существенно отличаться от предполагаемой. После завершения разработки производственно-эксплуатационные затраты уже известны достаточно точно и с ними можно оперировать как с детерминированными. Сущностью второго этапа является сокращение номенклатуры типов изделий до целесообразной с экономической точки зрения, ориентируясь на суммарный эффект.

Такого рода задачи с вероятностными исходными данными и процедурой принятия окончательного решения по цепочке "решение – анализ результатов – решение" относятся к классу двухэтапных задач стохастического программирования. Основной метод решения – построение их детерминированного аналога и его оптимизация.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Введем величины c_i^0 – начальных затрат на разработку изделий типа i, $i \in I$, и c_{ij} – производственно-эксплуатационных затрат при удовлетворении типом изделий i вида потребностей j, $i \in I$, $j \in J$. Пусть эти величины случайные, а $F_i^0(u)$ и $F_{ij}(u)$ – функции распределения c_i^0 и c_{ij}. Положим критерием оптимальности минимум математического ожидания суммарных затрат. Допуская, что распределение изделий по потребностям осуществляется в условиях, когда все случайные величины приняли конкретные значения и являются детерминированными, требуется определить такое подмножество α множества I типов изделий, которое обеспечивает удовлетворение всех потребностей с минимальным математическим ожиданием суммарных затрат, т.е. найти вектор $Y^* = (y_1^*, \ldots, y_m^*)$, удовлетворяющий условиям

$$\varphi(Y^*) = \min_{Y} \{ M [\sum_{i \in I} c_i^0 y_i + \min_{X} \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij}] \}, \qquad (1)$$

$$\sum_{i \in I} x_{ij} = 1, \; j \in J, \tag{2}$$

$$x_{ij} \leqslant y_i, \; i \in I, \; j \in J, \tag{3}$$

$$x_{ij}, \; y_i \in \{0, 1\}, \; i \in I, \; j \in J, \tag{4}$$

где $M[\xi]$ – математическое ожидание случайной величины ξ;

$$y_i = \begin{cases} 1, \text{ если тип изделий } i \text{ входит в оптимальный ряд;} \\ 0 - \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если тип изделий } i \text{ используется для удовлетворения потребностей вида } j; \\ 0 - \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Особенность задачи (1) – (4) в том, что для каждой реализации случайных величин, учитываемых в ней, решение состоит из множества типов изделий, уже включенных в оптимальный ряд (оно определяется вектором $Y = \| y_i \|$), и плана распределения этих изделий для удовлетворения потребностей ($X = \| x_{ij} \|$). При этом X является случайным и определяется исходя из реализовавшихся значений величин c_{ij} производственно-эксплуатационных затрат, а Y^* – исходя из законов распределения всех случайных величин, принимаемых во внимание в задаче. Полагая, что все случайные величины c_i^0, c_{ij}, $i \in I$, $j \in J$, независимы, запишем задачу (1) – (4) в форме эквивалентной ей детерминированной задачи дискретного программирования.

Найти множество $\alpha \subseteq I$ такое, что

$$\varphi(\alpha) = \min \{ \varphi(\omega) \mid \omega \subseteq I \}, \tag{5}$$

где

$$\varphi(\omega) = \sum_{i \in \omega} \bar{c}_i^0 + \sum_{j \in J} \mu_j(\omega), \tag{6}$$

$$\bar{c}_i^0 = M[c_i^0], \; i \in I, \tag{7}$$

$$\mu_j(\omega) = M[\min_{i \in \omega} c_{ij}], \; \mu_j(\phi) = \infty, \; j \in J. \tag{8}$$

Для построения эффективного алгоритма решения задачи (5) – (8) необходимо, во-первых, определить способы вычисления величин $\mu_j(\omega)$ и, во-вторых, исследовать особенности целевой функции $\varphi(\omega)$.

Прежде докажем справедливость следующих достаточно общих утверждений.

Теорема 1. *Если случайные величины ξ_i, $i \in \omega$, независимы и имеют плотности и функции распределения соответственно $f_i(u)$ и $F_i(u)$, то плотность распределения $f(\omega, u)$ величины $v = \min \{ \xi_i \mid i \in \omega \}$*

$$f(\omega, u) = \sum_{i \in \omega} f_i(u) \prod_{k \in \omega \setminus \{i\}} [1 - F_k(u)]. \tag{9}$$

Теорема 2. *Если $\omega_1, \omega_2 \subseteq I$ и $\omega_1 \cap \omega_2 = \phi$, $\omega_1, \omega_2 \neq \phi$ и $F(\omega, u) = \int_{-\infty}^{u} f(\omega, z)\, dz$, то*

$$f(\omega_1 U \omega_2, u) = f(\omega_1, u)[1 - F(\omega_2, u)] + f(\omega_2, u)[1 - F(\omega_2, u)]. \tag{10}$$

Следствие 1. *В условиях теоремы 2 справедливо равенство*

$$F(\omega_1 U \omega_2, u) = F(\omega_1, u) + F(\omega_2, u) - F(\omega_1, u) F(\omega_2, u). \tag{11}$$

Теорема 3. *Если $\mu(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u f(\omega, u)\, du$, то в условиях теоремы 2 справедливо неравенство* $\mu(\omega_1 U \omega_2) < \min \{ \mu(\omega_1), \mu(\omega_2) \}$.

Следствие 2. *Если случайные величины ξ_i, $i \in \omega$, независимы, то*

$$M[\min \{ \xi_i \mid i \in \omega \}] < \min \{ M[\xi_i] \mid i \in \omega \}.$$

Теорема 4. *В условиях теоремы 2 справедливо неравенство*

$$\mu(\omega_1 \setminus \{i\}) - \mu(\omega_1) > \mu(\omega_2 U \omega_1 \setminus \{i\}) - \mu(\omega_2 U \omega_1), \tag{12}$$

т.е. функция $\mu(\omega)$ супермодулярна.

Доказательства теорем и следствий приведены в Приложении.

С учетом этих теорем и следствий выражение для определения $\mu_j(\omega)$ можно записать как

$$\mu_j(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u f_j(\omega, u)\, du, \tag{13}$$

где

$$f_j(\omega, u) = \sum_{i \in \omega} f_{ij}(u) \prod_{k \in \omega \setminus \{i\}} [1 - F_{kj}(u)]. \tag{14}$$

Здесь $f_{ij}(u)$ и $F_{ij}(u)$ – плотность и функция распределения случайной величины c_{ij}, $i \in I$, $j \in J$.

Кроме того, величины $\mu_j(\omega)$ обладают свойствами если $\omega_1 \subseteq \omega_2 \subseteq I$, то $\forall j \in J : \mu_j(I) \leqslant \mu_j(\omega_2) \leqslant \leqslant \mu_j(\omega_1) \leqslant \mu_j(\phi) = \infty$,

$$\forall i \in \omega_1 \subseteq \omega_2 \subseteq I \text{ и } \forall j \in J, \tag{15}$$

$$\mu_j(\omega_i \setminus \{i\}) - \mu_j(\omega_1) \geqslant \mu_j(\omega_2 \setminus \{i\}) - \mu_j(\omega_2). \tag{16}$$

Полагая в дальнейшем $\mu_j(\omega)$ известными и опираясь на (15), (16), построим алгоритм решения задачи (5) – (8).

2. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Для решения (5) – (8) предлагается использовать вариант алгоритма расчетов [4], основанный на последовательном исключении переменных из решения. Введем понятие интервала – семейства $[A, B]$, $A \subseteq B \subseteq I$ подмножеств $\omega \subseteq I$ таких, что $A \subseteq \omega \subseteq B$.

Определим величину $Q(i, \omega)$ дополнительных затрат, появляющихся при исключении изделия типа i из множества изделий ω

$$Q(i, \omega) = \sum_{j \in J} [\mu_j(\omega \setminus \{i\}) - \mu_j(\omega)] - \bar{c}_i^0. \tag{17}$$

Точкой локального минимума функции $\varphi(\omega)$ назовем подмножество $\omega_0 \subseteq I$ такое, что

1) $\forall i \in \omega_0 : Q(i, \omega_0) \geqslant 0$,

2) $\exists i \in I \setminus \omega_0 : Q(i, \omega_0 U \{i\}) < 0$.

Каждой вершине дерева возможных вариантов соответствует интервал $[A, B]$, определяющий множества $A \subseteq \omega \subseteq B$, которые не дают ухудшения оценки $\varphi(B)$, полученной в этой вершине. С учетом введенных обозначений алгоритм решения задачи (5) – (8) будет включать следующие шаги.

1. Строится дерево возможных вариантов, начиная с вершины, соответствующей интервалу $[A, B]$, $A = \phi$, $B = I$.

2. Определяется рекорд в вершине $[A, B] : R = \varphi(B)$.

3. Выполняется последовательное сокращение интервала по 1-му и 2-му правилам отбраковки (см. ниже) до тех пор, пока это возможно.

4. Если условия правил отбраковки не выполняются ни для одного элемента $i \in B \setminus A$, то осуществляем ветвление по самой левой из непройденных ветвей по схеме

$$[AU\{i\}, B] \leftarrow [A, B] \rightarrow [A, B \setminus \{i\}], \ i \in B \setminus A.$$

Если $A = B$, то интервал $[A, B]$ соответствует висящей вершине, и ветвление из нее не производится.

5. Повторяем пункты 2–4 до тех пор, пока это возможно. Решением задачи является висящая вершина с минимальным рекордным значением R.

Для сокращения интервала в вершине $[A, B]$ предлагается использовать следующие два правила отбраковки.

1. Если для $i \in B \setminus A$ выполняется условие $Q(i, B) > 0$, то $i \in \omega_0$ и $\omega_0 \in [AU\{i\}, B]$, т.е. интервал $[A, B]$ может быть преобразован в $[AU\{i\}, B]$ без потери множества ω_0, соответствующего локальному экстремуму функции $\varphi(\omega)$.

2. Если R – текущий рекорд и для вершины $[A, B]$ выполняется условие

$$\varphi(B) + \sum_{i \in B \setminus A} \min [0; Q(i, B)] \geqslant R,$$

то вершина $[A, B]$ является бесперспективной с точки зрения решения исходной задачи (глобального экстремума) и ее можно преобразовать в висящую – $[B, B]$.

3. ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР

Рассмотрим решение следующей задачи оптимизации параметрических рядов. Пусть для обеспечения множества $J = \{1, \ldots, 6\}$ видов потребностей возможно использование одного или нескольких изделий из множества $I = \{1, \ldots, 4\}$.

Известно, что величины потребностей каждого вида равны $\| b_j \| = \| 50, 10, 10, 40, 20, 80 \|$, затраты на производство и эксплуатацию одного изделия типа i представляют собой случайную величину, распределенную по закону Пуассона с математическими ожиданиями $\| \bar{c}_i \| = \| 5, 2, 4, 3 \|$, вектор начальных затрат $\| \bar{c}_i^0 \| = \| 70, 90, 40, 100 \|$.

Математические ожидания величин $\rho(\omega) = \min_{i \in \omega} c_i$ рассчитаны согласно (13), (14) и представлены

ω	$\rho(\omega)$	$\mu_1(\omega)$	$\mu_2(\omega)$	$\mu_3(\omega)$	$\mu_4(\omega)$	$\mu_5(\omega)$	$\mu_6(\omega)$
$\{1\}$	5	∞	50	50	200	∞	400
$\{2\}$	2	100	20	∞	∞	40	160
$\{3\}$	4	200	40	40	160	80	∞
$\{4\}$	3	150	∞	30	120	60	240
$\{1,2\}$	1,87	100	18,7	50	200	40	149,6
$\{1,3\}$	3,23	200	32,3	32,3	129,2	80	400
$\{1,4\}$	2,60	150	50	26	104	60	208
$\{2,3\}$	1,73	86,5	17,3	40	160	34,6	160
$\{2,4\}$	1,54	77	20	30	120	30,8	123,2
$\{3,4\}$	2,39	119,5	40	23,9	95,6	47,8	240
$\{1, 2, 3\}$	1,64	86,5	16,4	32,3	129,6	34,6	149,6
$\{1, 2, 4\}$	1,47	77	18,7	26	104	30,8	117,6
$\{1, 3, 4\}$	2,18	119,5	32,3	21,8	87,2	47,8	208
$\{2, 3, 4\}$	1,41	70,5	17,3	23,9	95,6	28,2	123,2
$\{1, 2, 3, 4\}$	1,36	70,5	16,4	21,8	87,2	28,2	117,6

в таблице. Там же приведены значения $\mu_j(\omega) = b_j\rho(\omega \cap \Omega_j)$, где $\Omega_j \subseteq I$ – множество изделий, которые могут удовлетворить потребность вида j.

Решение данной задачи предложенным алгоритмом будет состоять из следующих шагов:

1. Начальная вершина $[\phi, I]$ включает все возможные варианты $\phi \subseteq \omega \subseteq I$. В соответствии с (17)

$Q(1, I) = -53{,}0,$

$Q(2, I) = 84{,}9,$

$Q(3, I) = -7{,}6,$

$Q(4, I) = 6{,}9,$

$\varphi(I) = 641{,}7.$

Согласно правилу 1 отбраковки, интервал $[\phi, I]$ преобразуем в $[A, B]$, где $A = \{2, 4\}$, $B = I$.

2. Так как дальнейшее сокращение интервала невозможно, то ветвим вершину $[A, B]$ на две новых в соответствии с п. 4 алгоритма. Получаем две новые вершины

$[A_1, B_1] = [\{2, 4\}, \{2, 3, 4\}]$

и

$[A_2, B_2] = [\{1, 2, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}].$

3. В вершине $[A_1, B_1]$ имеем $\varphi(B_1) = 588{,}7$, $Q(3, B_1) = 2, 3$ и, согласно правилу 1 отбраковки, интервал $[A_1, B_1]$ преобразуется в $[B_1, B_1]$, т.е. в висящую вершину с рекордом $R_1 = 588{,}7$.

4. В вершине $[A_2, B_2]$ имеем $\varphi(B_2) = 641{,}7$, $Q(3, B_2) = -7{,}6$ и, в соответствии с правилом 2 отбраковки, $\varphi(B_2) + Q(3, B_2) = 634{,}1 \geqslant R_1 = 588{,}7$. Таким образом, $[A_2, B_2] \to [B_2, B_2]$ и $R_2 = 541{,}7$.

5. Поскольку все вершины дерева возможных вариантов являются висящими, то алгоритм заканчивает работу и решением задачи является $\omega_0 \in [B_1, B_1]$, т.е. $\omega = \{2, 3, 4\}$. При этом суммарные затраты минимальны и равны $\varphi(\omega_0) = 588{,}7$. Решение закончено.

Рассмотренный пример наглядно иллюстрирует достоинства предлагаемого подхода к выявлению оптимальных параметрических рядов изделий в условиях неопределенности. Так, если для решения исходной задачи взять ее наиболее простой детерминированный вариант, в котором вместо случайных величин используются их математические ожидания, то оптимальный ряд определится множеством $\widetilde{\omega} = \{2, 3\}$, а величина суммарных затрат при этом будет равна $\varphi(\widetilde{\omega}) = 650$, т.е. существенно больше минимально достижимого.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1.

Для того чтобы величина v попала в интервал $(u, u + du)$ необходимо и достаточно, чтобы одно значение из $(|\omega|)$ величин ξ_i, $i \in \omega$, попало в интервал $(u, u + du)$, а остальные $(|\omega| - 1)$ приняли значения не меньше, чем $(u + du)$.

Таким образом, с точностью до бесконечно малых высшего порядка

$$f(\omega, u)\, du = \sum_{i\in\omega} f_i(u) \prod_{k\in\omega\setminus\{i\}} [1 - F_k(u)]\, du$$

и, следовательно,

$$f(\omega, u) = \sum_{i\in\omega} f_i(u) \prod_{k\in\omega\setminus\{i\}} [1 - F_k(u)]$$

что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 2.

Введем величины $v_k = \min\{\xi_i \mid i\in\omega_k\}$, $k = 1,2$. Для того чтобы величина $v = \min\{v_1, v_2\}$ попала в бесконечно малый интервал $(u, u + du)$ (событие A), необходимо и достаточно, чтобы произошло одно из двух случайных событий

$$A_1:\ u \leqslant v_1 \leqslant u + du,\ \ v_2 > u + du,$$

$$P(A_1) = f(\omega_1, u)\, du\, [1 - F(\omega_2, u)].$$

$$A_2:\ u \leqslant v_2 \leqslant u + du,\ \ v_1 > u + du,$$

$$P(A_2) = f(\omega_2, u)\, du\, [1 - F(\omega_1, u)].$$

Таким образом, $P(A) = f(\omega_1 \cup \omega_2, u) = P(A_1) + P(A_2)$, откуда и следует доказываемое.

Доказательство следствия 1 выводится из цепочки равенств

$$F(\omega_1 \cup \omega_2, u) = \int_{-\infty}^{u} f(\omega_1 \cup \omega_2, z)\, dz = \int_{-\infty}^{u} f(\omega_1, z)[1 - F(\omega_2, z)]\, dz +$$

$$+ \int_{-\infty}^{u} f(\omega_2, z)[1 - F(\omega_1, z)]\, dz = F(\omega_1, u) + F(\omega_2, u) - \int_{-\infty}^{u} f(\omega_1, z) F(\omega_2, z)\, dz -$$

$$- \int_{-\infty}^{u} f(\omega_2, z) F(\omega_1, z)\, dz = F(\omega_1, u) + F(\omega_2, u) - F(\omega_1, u) F(\omega_2, u) +$$

$$+ \int_{-\infty}^{u} f(\omega_2, z) F(\omega_1, z)\, dz - \int_{-\infty}^{u} f(\omega_2, z) F(\omega_1, z)\, dz = F(\omega_1, u) + F(\omega_2, u) -$$

$$- F(\omega_1, u) F(\omega_2, u).$$

Что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 3.

В соответствии с определением $\mu(\omega)$ и теоремой 2

$$\mu(\omega_1) - \mu(\omega_1 \cup \omega_2) = \int_{-\infty}^{\infty} u f(\omega_1, u)\, du - \int_{-\infty}^{\infty} u\,\{f(\omega_1, u)[1 - F(\omega_2, u)] +$$

$$+ f(\omega_2, u)[1 - F(\omega_1, u)]\}\, du = \int_{-\infty}^{\infty} u\,\{f(\omega_1, u) - f(\omega_1, u)[1 - F(\omega_2, u)]\}\, du -$$

$$- \int_{-\infty}^{\infty} u f(\omega_2, u)[1 - F(\omega_1, u)]\, du = \int_{-\infty}^{\infty} u f(\omega_1, u) F(\omega_2, u)\, du - \int_{-\infty}^{\infty} u f(\omega_2, u)[1 -$$

$$- F(\omega_1, u)]\, du = J_1 - J_2.$$

Интегрируя по частям, имеем

$$J_2 = \int_{-\infty}^{\infty} u f(\omega_2, u)[1 - F(\omega_1, u)]\, du = - \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega_2, u)[1 - F(\omega_1, u) -$$

$$- u f(\omega_1, u)]\, du = - \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega_2, u)[1 - F(\omega_1, u)]\, du + J_1.$$

Таким образом, $\mu(\omega_1) - \mu(\omega_1 \cup \omega_2) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega_2, u)[1 - F(\omega_1, u)]\, du > 0$, так как $F(\omega_1, u)$, $F(\omega_2, u)$ – функции распределения случайных величин $v_1 = \min\{\xi_i \mid i\in\omega_1\}$ и $v_2 = \min\{\xi_i \mid i\in\omega_2\}$, соответственно.

Аналогично $\mu(\omega_2) - \mu(\omega_1 \cup \omega_2) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega_1, u)[1 - F(\omega_2, u)]\, du > 0.$

Из полученных неравенств следует, что $\mu(\omega_1 U \omega_2) < \mu(\omega_1)$ и $\mu(\omega_1 U \omega_2) < \mu(\omega_2)$, т.е. $\mu(\omega_1 U \omega_2) < \min\{\mu(\omega_1), \mu(\omega_2)\}$. Что и требовалось доказать.

Доказательство следствия 2. Оно вытекает из теоремы 3

$M[\min\{\xi_i | i \in \omega\}] = \mu(\omega) < \min\{\mu(\{k\}), \mu(\omega\backslash\{k\})\} < \min\{\mu(\{k\}), \min\{\mu(\{l\}),$

$\mu(\omega\backslash\{k, l\})\}\} = \min\{\mu(\{k\}), \mu(\{l\}), \mu(\omega\backslash\{k, l\}) < \ldots < \min\{\mu(\{i\}) | i \in \omega\} =$

$= \min\{M[\xi_i] | i \in \omega\}$, так как

$$\mu(\{i\}) = \int_{-\infty}^{\infty} uf(\{i\}, u)\,du = \int_{-\infty}^{\infty} uf_i(u)\,du = M[\xi_i].$$

Что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 4.

Положим $\omega_3 = \{i\} \subset \omega_1$, $\omega_4 = \omega_1 \backslash \omega_3$, $\omega_5 = \omega_2 \; U \omega_4$.

В этом случае $\omega_3 \cap \omega_4 = \phi$, $\omega_3 \cap \omega_5 = \phi$ и по аналогии с доказательством теоремы 3

$$\Delta\mu_1 = \mu(\omega_5) - \mu(\omega_5 \; U \omega_3) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega_3, u)[1 - F(\omega_5, u)]\,du,$$

$$\Delta\mu_2 = \mu(\omega_4) - \mu(\omega_4 \; U \omega_3) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega_3, u)[1 - F(\omega_4, u)]\,du.$$

При этом

$$\Delta\mu_2 - \Delta\mu_1 = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega_3, u)[F(\omega_5, u) - F(\omega_4, u)]\,du > 0,$$

поскольку $\omega_4 \subset \omega_5 = \omega_4 \; U \omega_2$, и в силу следствия 1

$F(\omega_5, u) = F(\omega_4 \; U \omega_2, u) = F(\omega_4, u) + F(\omega_2, u) - F(\omega_4, u) F(\omega_2, u) =$

$= F(\omega_4, u) + F(\omega_2, u)[1 - F(\omega_4, u)] > F(\omega_4, u).$

Таким образом, $\mu(\omega_4) - \mu(\omega_4 U \omega_3) > \mu(\omega_5) - \mu(\omega_5 U \omega_3)$. Отсюда следует доказываемое утверждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Береснев В.Л., Гимади Э.Х., Дементьев В.Т.* Экстремальные задачи стандартизации. Новосибирск: Наука, 1978.
2. *Алексеев О.Г.* Комплексное применение методов дискретной оптимизации. М.: Наука, 1987.
3. *Алексеев О.Г.* Многомерная задача стандартизации // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1979. № 1.
4. *Юдин Д.Б.* Математические методы управления в условиях неполной информации. М.: Сов. радио, 1974.

Поступила в редакцию
16 II 1989