

## Когнитивная психология

© 1997 г. В.М. Слуцкий, А.К. Моррис

КОГНИТИВНЫЕ МЕХАНИЗМЫ СПОСОБНОСТИ РАССУЖДАТЬ  
У ПОДРОСТКА: ВКЛАД КУЛЬТУРНЫХ И ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ  
ФАКТОРОВ\*

Авторы выдвигают предположения:

А. Специальное обучение, направленное на формирование метакомпонентов дедуктивного рассуждения, может улучшить результаты решения ряда мыслительных задач.

Б. Представление о метакомпонентах, приобретенное при решении задач внутри одной области знания, может быть перенесено на решение задач в другой.

В исследовании приняли участие 490 детей подросткового возраста из Англии и России. Внутри английской и российской выборки были выделены две возрастные подгруппы – младшая и старшая. Испытуемые строили алгебраические и вербально-логические рассуждения. Полученные результаты подтверждают выдвинутые предположения.

*Ключевые слова:* мыслительные задачи, метакомпоненты, интеллектуальная деятельность, когнитивное развитие, обучение.

В психологической литературе давно обсуждаются вопросы о том, как развивается способность строить дедуктивное рассуждение<sup>1</sup>, и переносится ли умение рассуждать, приобретенное внутри определенного контекста и содержания, в новые контекст и содержание [43]. В ответ на первый вопрос было высказано несколько предположений. Исследователи, работающие в русле теории Пиаже, обычно считают, что способность строить дедуктивное рассуждение – это результат естественного развития формальных интеллектуальных операций, и поэтому она не зависит от процесса обучения [26]. Исследователи, придерживающиеся иных теоретических взглядов, пытались показать, что специально организованное обучение может улучшить возможности ребенка строить дедуктивное рассуждение. По второму вопросу (относительно возможности переноса навыка рассуждения) взгляды исследователей также расходятся. Одни [63] считают, что такой перенос невозможен; другие [4, 13, 22, 26, 42] полагают, что при определенных условиях перенос навыка возможен.

\* В статье частично используются данные, полученные в диссертационном исследовании А.К. Моррис, выполненном ею в Университете штата Огайо под руководством В.М. Слуцкого. Авторы выражают признательность учащимся, учителям и администрации московской школы № 91, школ в России и Англии, а также коллегам в России и США, без которых эта работа не могла бы состояться. Финансовая поддержка была оказана фондом Johann Jacobs Foundation и университетами штатов Делавэр и Огайо.

<sup>1</sup> Рассуждение (reasoning) определяется как интеллектуальная активность, в процессе которой делается вывод или заключение из имеющейся информации. Логическая форма такого вывода носит название умозаключения.



В настоящей статье предлагается переформулировать этот вопрос следующим образом: развивается ли способность к построению дедуктивного рассуждения и его применению в решении конкретных мыслительных задач без специально организованного обучения? Для того, чтобы ответить на него, вводится различие между *метакомпонентами* и *трансформационными компонентами* дедуктивного рассуждения. Метакомпоненты дедуктивного рассуждения определяются как понимание логических оснований рассуждения. Они включают в себя умение различать логически необходимые и эмпирически верные (возможные) заключения, умение различать правильно построенные, логически верные, *валидные* рассуждения от неправильно построенных, логически неверных, *невалидных* рассуждений, а также понимание логической необходимости заключения из валидного дедуктивного рассуждения. Трансформационные компоненты определяются как умение выполнять необходимые символические, языковые и умственные преобразования. Таким образом, умение сделать вывод о том, что "Сократ смертен" из посылок "Все люди смертны" и "Сократ — человек", относится к трансформационным компонентам, в то время как умение установить логическую валидность этого рассуждения и логическую необходимость вывода относится к метакомпонентам. В статье утверждается, что метакомпоненты необходимы для построения определенных типов дедуктивных рассуждений, и приводятся свидетельства того, что (1) метакомпоненты не развиваются естественным образом, (2) метакомпоненты развиваются в результате специально организованного обучения и (3) возможен перенос навыка дедуктивного рассуждения, приобретенного в одной области знания, в другую область знания.

В статье излагаются результаты двух исследований. В первом рассматривается, как у детей в условиях разных программ обучения алгебре формируется понимание логической необходимости и как это понимание используется при построении алгебраических рассуждений и решении алгебраических задач. Во втором изучается перенос понимания логической необходимости на построение вербальных рассуждений.

В этих исследованиях установлено: дети, обучающиеся по программе, ориентированной на формирование метакомпонентов дедуктивного рассуждения, лучше понимают логическую необходимость при построении как алгебраических, так и вербальных рассуждений, чем дети, обучающиеся по программе, ориентированной на формирование трансформационных компонентов. В исследованиях также установлено, что эти различия увеличиваются с возрастом.

## ВВЕДЕНИЕ

Изучение развития способности рассуждать имеет давние традиции как в психологии развития, так и в когнитивной психологии [2, 3, 7, 17, 26, 50, 61]. Со времен Ф. Бэкона различают два типа рассуждений: дедуктивные и индуктивные. При индуктивном рассуждении делается вероятностное (возможное) заключение, основанное на наличной эмпирической информации, частном случае или прецеденте [38]. Заключение основано на частном случае в том отношении, что любая новая информация, каждый результат отдельного испытания может повлиять на индуктивное заключение. Оно вероятно в том смысле, что ни соблюдение правил индуктивного вывода, ни верность имеющейся эмпирической информации не гарантируют эмпирической верности индуктивного заключения.

Последующие испытания могут либо подтвердить такое заключение, либо опровергнуть его. Например, французы говорят по-французски, итальянцы — по-итальянски, русские — по-русски, корейцы — по-корейски, а американцы?... Индуктивные заключения всегда основываются на опыте рассуждающего и могут меняться в зависимости от вновь поступающей информации. Если новая информация находится в соответствии со старой, она укрепляет *субъективную уверенность* рассуждающего в правильности собственного заключения, увеличивает *субъективную вероятность*



такого заключения. Тем не менее, независимо от субъективной уверенности рассуждающего в правильности индуктивного заключения, само заключение всегда будет вероятностным [2].

Напротив, в дедуктивном рассуждении к заключению можно придти, основываясь исключительно на информации, которая содержится в посылах в соответствии с правилами дедукции. Заключения, достигнутые в соответствии с правилами дедукции, определяются как *валидные*. Они основаны на закономерностях, логически необходимы и не требуют последующей эмпирической проверки (в том смысле, что сделаны в соответствии с определенными правилами рассуждения и не связаны ни с собственным эмпирическим содержанием, ни с эмпирическим содержанием посылок) [38]. Заключение логически необходимо и потому, что оно с необходимостью следует из посылок, независимо от того, насколько рассуждающий уверен в своем выводе [46, 49]. Таким образом, важно различать логически необходимые, основанные на закономерности, дедуктивные рассуждения, и вероятностные, основанные на опыте рассуждающего, индуктивные рассуждения. Игнорирование этого различия может быть, как будет показано ниже, источником многочисленных ошибок в построении рассуждения [19, 32, 49].

Исследователи когнитивных механизмов дедуктивного рассуждения выделяют, как минимум, два уровня построения рассуждения: трансформационный (уровень языка, умственных операций, переработки информации) и метауровень (различение валидных и невалидных выводов; понимание логической необходимости валидного дедуктивного вывода) [6, 27, 39, 55, 61, 62]. Владение навыками трансформационного уровня необходимо для осуществления адекватных преобразований в соответствии с правилами дедукции, а навыки метауровня важны для проверки и валидации дедуктивного заключения. Метауровень дедуктивных заключений фигурировал в исследованиях под разными названиями: метакомпоненты [61, 62], вторичные логические навыки [6], металогика [27, 39], метадедукция [55]. В настоящей статье мы будем пользоваться термином "метакомпоненты" для обозначения метауровня дедуктивного вывода.

Важный "метакомпонентный" навык, критически необходимый при валидации дедуктивного заключения, – это способность отличать логически необходимые утверждения от эмпирически верных. Умение отличать одно от другого и использовать это в решении конкретных мыслительных задач можно определить как понимание логической необходимости. Поскольку валидность дедуктивного заключения не зависит от эмпирического статуса ни посылок, ни самого заключения, возможно, что из эмпирически верных посылок будет сделано невалидное заключение, или валидное заключение будет сделано из эмпирически ложных посылок. Валидные заключения, которые основаны на эмпирически верных посылах, определяются как необходимо логически истинные заключения. Такие заключения верны *a priori* и не требуют эмпирической проверки<sup>2</sup>. Неспособность отличать продукт валидного дедуктивного рассуждения, сделанного из эмпирически верных посылок, – логически необходимые, *априорные* истины, – от продукта индуктивного рассуждения – эмпирических, вероятностных, *апостериорных* истин, – свидетельствует о недостаточном понимании логической необходимости.

Понимание логической необходимости существенно как для построения правильных вербальных, научных и математических рассуждений, так и для использования в процессе коммуникации, диалога, обсуждения или спора. Непонимание, смешение логически необходимых и вероятностных заключений может приводить к серьезным ошибкам в построении рассуждений. Результаты исследований говорят о том, что таким ошибкам подвержены не только дети, но и взрослые [16, 17, 50]. Среди прочих, эти ошибки могут включать неточности предубеждения при построении вербальных рассуждений [44]; неразличение доказательства в общем виде и конкретного примера

<sup>2</sup> Читателей, желающих более подробно ознакомиться с философской стороной этого вопроса, можно отослать к "Критике чистого разума" Канта, Витгенштейну [68], Карнапу [8] или Куайну [51].



в математическом рассуждении [19, 36]; а также игнорирование вновь поступающих эмпирических данных, противоречащих взглядам и убеждениям рассуждающего при построении индуктивных рассуждений [56].

Установлено, что понимание логической необходимости, способность отличать логически необходимые, априорные истины от эмпирически верных, апостериорных истин, развивается онтогенетически позже, чем способность выполнять простые дедуктивные преобразования. Дошкольники и дети раннего школьного возраста не отличают логически необходимые заключения от эмпирических заключений. Например, дети этого возраста не понимают, что тавтология типа "У меня в кармане шар; он либо красный, либо не красный" имеет статус логически необходимой истины и не требует эмпирической проверки [30, 35, 48, 53]. Вместе с тем, дети и подростки, которые не понимают логической необходимости, могут формулировать несложные дедуктивные заключения, например, такие, которые не противоречат простому здравому смыслу [30, 31, 35, 37, 39, 49, 58]. Лишь к возрасту, соответствующему стадии формальных операций, у детей формируется частичное понимание логической необходимости [53, 60].

Однако, существующие теории развития не объясняют те многочисленные ошибки дедуктивного рассуждения, которые совершают как дети, так и взрослые, обнаруживая недостаточность нашего теоретического знания о том, при каких условиях способность строить дедуктивное рассуждение формируется в онтогенезе и использовалась для решения конкретных мыслительных задач. Одни исследователи предположили, что эта способность развивается экстенсивным образом, в процессе онтогенеза [33, 34, 60], другие считали, что для того, чтобы у ребенка появилась эта способность, он должен посещать школу и овладеть чтением и письмом [6], или даже пройти специальное обучение [13]. Подход Пиаже и некоторых его последователей, получивший название "естественной логики" (natural logic), встречает наибольшие трудности при объяснении данных о том, что не только дети, но и взрослые испытывают трудности студентов университетов, часто совершают ошибки в дедуктивных рассуждениях, связанные с неразличением логически необходимых и эмпирически правдоподобных заключений [14, 19, 27, 36, 41, 59].

Неразличение ведет к тому, что при построении дедуктивного рассуждения испытуемые опираются на свои знания об объекте рассуждения, приобретенные в их предыдущем опыте, а не на правила дедукции. Такие ошибки получили название *ошибок рассуждения, связанных с предубеждением*. Так, испытуемые склонны переоценивать валидность рассуждений с эмпирически правдоподобными заключениями и недооценивать валидность рассуждений с эмпирически неправдоподобными заключениями [14, 16, 33, 46, 59]. К примеру, испытуемые скорее оценят рассуждение как валидное, если оно звучит так: "Некоторые богатые люди – не миллионеры", чем заключение "Некоторые миллионеры – небогатые люди" [43].

Один из разделов знания, где понимание логической необходимости играет центральную роль – математика, включая такие ее разделы, как алгебра и геометрия. Понимание того, что данные – это посылки, доказательство – продукт дедуктивного рассуждения, а теорема – логически необходимое заключение, необходимо для овладения математическим знанием. Существует большое количество данных, свидетельствующих о важности понимания логической необходимости при построении алгебраического рассуждения [2, 13, 19, 36, 66]. Кроме того, алгебра – удобная модель для исследования как математического, так и нематематического рассуждения, ибо большинство детей изучают ее в школе и простые алгебраические задачи им, в основном, знакомы. Кроме того, обучение алгебре осуществляется в соответствии с определенными принципами – программами обучения. Некоторые программы обучения алгебре основаны на эклектической комбинации принципов, в то время как другие имеют четкие приоритеты в отношении формирования трансформационных и метакомпонентов алгебраического рассуждения [36].

Таким образом, сравнение понимания логической необходимости у детей со специ-



ально сформированным представлением о метакомпонентах, с теми, кто был обучен выполнять трансформации, может дать ответы на поставленные вопросы. Напомним эти вопросы. Формируется ли у детей понимание логической необходимости без специально организованного обучения и способствует ли подобное обучение формированию понимания логической необходимости? Показателем этого была бы более высокая успешность построения правильного алгебраического рассуждения и решения алгебраических задач, требующих понимания логической необходимости, детьми, у которых в ходе специально организованного обучения формировалось представление о метакомпонентах логического рассуждения. Сохраняются ли эти различия при выполнении заданий другого типа, например, построении вербальных рассуждений? Показателем будет положительный ответ.

Теоретические положения данной статьи можно суммировать следующим образом. Во-первых, мы исходим из того, что понимание логической необходимости, как способности отличать заключения, верные *a priori*, от эмпирических заключений *a posteriori*, является важным компонентом процесса рассуждения. Во-вторых, мы полагаем, что многие дети, подростки и взрослые не различают логически необходимые и эмпирические верные заключения или не используют это различие при решении конкретных мыслительных задач. В-третьих, мы допускаем, что специальное обучение с акцентом на представлении о метакомпонентах может повысить успешность построения логической необходимости. И в-четвертых, мы принимаем: понимание логической необходимости, приобретенное внутри одной области знания, может быть перенесено в другую.

Эти положения привели нас к формулированию следующих гипотез:

I. Без специального обучения дети либо не отличают логически необходимые априорные заключения от эмпирически верных, апостериорных заключений, либо не используют это отличие при решении конкретных мыслительных задач. Поэтому:

1. Дети, которые обучаются по программе, где уделяется особое внимание метакомпонентам алгебраического дедуктивного рассуждения, будут демонстрировать лучшее умение отличать логически необходимые утверждения от эмпирических утверждений при построении алгебраических рассуждений, чем дети, которых этому не обучали.

2. Дети, у которых было специально сформировано представление о метакомпонентах алгебраического дедуктивного рассуждения, лучше других решают алгебраические задачи, требующие понимания логической необходимости.

3. Дети, у которых не было сформировано представление о метакомпонентах алгебраического дедуктивного рассуждения, медленнее прогрессируют в понимании логической необходимости, чем те, которых этому обучали.

II. Возможен перенос понимания логической необходимости, сформированной в одной области знания, в другую область. Поэтому:

4. Дети, у которых специально формируют представление о метакомпонентах алгебраического дедуктивного рассуждения, будут лучше других строить вербальные рассуждения, требующие понимания логической необходимости.

Были проведены две серии экспериментов по развитию понимания логической необходимости при построении алгебраических рассуждений и изучению переноса этого навыка в область вербальных рассуждений.

В обеих сериях участвовали дети, обучающиеся по разным программам преподавания алгебры. Первая – "экспериментальная" программа обучения математики в России [2, 11–13]. В ней обучение принципам построения абстрактного дедуктивного рассуждения предшествует оперированию числами; уделяется особое внимание метакомпонентам дедуктивного рассуждения и различию между логически необходимыми, априорными заключениями и эмпирически верными, апостериорными заключениями; подчеркивается логическая необходимость конкретных (например, численных) случаев, следующих из общих математических принципов, понятий и отношений. Сами эти принципы, понятия и отношения вводятся с самого начала в



общем виде, в качестве абстрактных объектов и их свойств; овладению ими предшествует обучение производить алгебраические преобразования. Так, понятия количества, отношения, структуры вводятся и формируются до работы с конкретными числами и до обучения детей конкретным алгебраическим преобразованиям. Будучи программой для начальной школы, она закладывает базу для усвоения трансформационных компонентов в курсе алгебры средней школы.

Вторая "экспериментальная" программа основана на диаметрально противоположных теоретических принципах. Национальный Математический Проект (НМП) в Англии [23] стремится повторить естественный прогресс в развитии алгебраического рассуждения – движение от конкретных трансформационных компонентов к более абстрактным метакомпонентам, от вычислений к абстрактным алгебраическим принципам. Трансформационным компонентам обучают индуктивно, основываясь на частных случаях, исследуя множество конкретных числовых примеров. Валидность алгебраических обобщений оценивается с помощью эмпирических (числовых) демонстраций [36].

Поскольку эти программы были разработаны в разных культурах, переменная программы оказалась смешанной с другими потенциально важными переменными – языка, семейных процессов и культурных особенностей, которые, как было показано в ряде исследований, могут влиять на протекание когнитивных процессов [9, 25, 42, 47]. Для контроля возможного смешения переменной программы и переменной культуры, а также для обеспечения возможности как кросскультурных, так и внутрикультурных сравнений, в тех же странах были взяты школы с "неэкспериментальными" программами. Эти школы имели сходное географическое положение, состав учеников и преподавателей, но не работали по специальным экспериментальным программам обучения алгебре.

Неэкспериментальная программа в России делает больший упор на дедукции, чем обе английские программы, но начинает это позже, чем российская экспериментальная программа. Кроме того, в российской программе отсутствует целенаправленное формирование представлений о таких метакомпонентах дедуктивного рассуждения, как основополагающие логические принципы. Курс алгебры для 7–9 классов характеризуется смещением акцента на теоретический уровень и большим вниманием к теоретическим обобщениям.

Английская неэкспериментальная программа характеризуется как индуктивная: главное внимание уделяется обобщению на основе анализа конкретных случаев [4]. В этой программе уменьшается значение формальной алгебры при увеличении количества численных примеров.

Для того, чтобы лучше понять срезовые различия в понимании логической необходимости – различий, которые могли бы указать на специфические механизмы развития, – в эксперимент были включены дети двух возрастных групп: (1) младшие подростки и (2) подростки среднего и старшего возраста. Подростки младшего возраста обучались формальной алгебре по крайней мере в течение года, а среднего и старшего – проходили алгебру не менее трех лет.

Поскольку программы воплощались в условиях очень разных систем образования, степень воплощения теоретических программных требований в практику учебного процесса не подвергалась специальному исследованию. Переменная программы использовалась лишь как категориальное замещение независимых переменных; проведенные исследования не позволяют оценить качество, успешность или учебную ценность этих программ, равно как и давать конкретные педагогические рекомендации.

#### **ИССЛЕДОВАНИЕ 1: ПОНИМАНИЕ ЛОГИЧЕСКОЙ НЕОБХОДИМОСТИ ПРИ ПОСТРОЕНИИ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО РАССУЖДЕНИЯ**

*Методика.* В исследовании участвовали четыре группы испытуемых: (1) Российская экспериментальная группа – ученики и выпускники экспериментальной программы преподавания математики, разработанной В.В. Давыдовым, которая воплощается



**Подробное описание выборки: общее количество испытуемых (*N*), средний возраст и стандартное отклонение возраста детей каждой подгруппы**

	<i>N</i>	Англия средн.	<i>S.D.</i>	<i>N</i>	Россия сред.	<i>S.D.</i>
<i>Экспериментальная программа</i>	130	14,76	0,86	141	13,56	1,767
Младшая группа	32	13,719	0,457	62	11,887	0,770
Старшая группа	88	15,216	0,718	59	15,288	0,645
<i>Неэкспериментальная программа</i>	130	14,73	0,88	89	13,23	1,483
Младшая группа	35	13,771	0,426	55	12,109	0,599
Старшая группа	85	15,247	0,688	34	14,941	0,600

в московской школе № 91 ( $n = 120$ ); (2) Российская неэкспериментальная группа – учащиеся одной из неэкспериментальных школ г. Москвы ( $n = 89$ ); (3) Английская экспериментальная группа – ученики старших классов одной из школ, работающей по программе Национального Математического Проекта ( $n = 120$ ); (4) Английская неэкспериментальная группа – учащиеся старших классов школы, работающей по неэкспериментальной программе. Выбор групп определялся следующими факторами. Во-первых, по обсужденным выше теоретическим соображениям, в обеих странах были выбраны экспериментальные школы с программами обучения алгебре, построенными на диаметрально противоположных принципах. Во-вторых, в тех же городах были выбраны неэкспериментальные школы со сходным составом учеников и преподавателей. С администрацией каждой школы проводились переговоры представителем исследовательской группы, получившим списки учащихся, из которых в случайном порядке были отобраны испытуемые каждой возрастной группы. Отбор испытуемых в России был организован и проходил под руководством авторов и их коллег из Российской Академии Образования, отбор испытуемых в Англии был проведен одним из авторов. Каждая группа состояла из детей двух возрастных уровней – подростков младшего возраста ("младшая группа") и подростков среднего и старшего возраста ("старшая группа"). Более подробная характеристика групп приводится в табл. 1.

Выбор именно этих возрастных уровней определялся следующим требованием: было необходимо, чтобы дети младшей группы, независимо от экспериментальных условий, изучали алгебру хотя бы в течение года формально, а дети старшей группы – в течение трех лет. Попытка уравнивать продолжительность обучения детей алгебре привела к тому, что дети из российской выборки оказались более, чем на год, младше своих английских сверстников (см. табл. 1). Это связано с тем, что в России обучение алгебре начинается на год раньше, чем в Англии; тем не менее, это не представлялось трудностью, поскольку предполагалось, что направление различий в способности рассуждать противоположно различиям в возрасте, т.е. младшие дети, прошедшие специальное обучение, будут строить дедуктивное рассуждение лучше, чем более старшие дети, не прошедшие специального обучения.

Для сравнения того, как дети выполняют задания, требующие понимания логической необходимости, была разработана специальная методика. Для контроля общего уровня овладения алгеброй в исследование были включены задачи, которые не требовали понимания логической необходимости. Все задания были составлены на английском языке и затем переведены на русский. После обратного перевода на английский язык в русский вариант методики были внесены необходимые исправления.

В исследовании были использованы следующие задания.

**Задания, требующие понимания логической необходимости.** (1) *Задача про Петю* (модификация задания Fischbein and Kedem, 1982 [19]). На уроке алгебры учитель



доказал, что все целые числа вида  $n^3 - n$  делятся на 6 без остатка. Доказательство было следующим: мы можем написать

$$n^3 - n = n(n^2 - 1)$$

Затем мы можем переписать выражение справа:

$$n(n^2 - 1) = n(n - 1)(n + 1)$$

Таким образом:

$$n^3 - n = n(n - 1)(n + 1) = (n - 1)n(n + 1)$$

Но  $(n - 1)n(n + 1)$  — произведение трех последовательных целых чисел, поэтому одно из них должно делиться на 2 и одно (не обязательно другое) должно делиться на 3. Таким образом, произведение должно делиться на  $2 \times 3$ , т.е. на 6.

Ученик этого класса, Петя, во всем сомневается. Он считает, что мы должны продемонстрировать вывод учителя, по крайней мере, на ста численных примерах, чтобы убедиться в том, что теорема верна. Каково ваше мнение? Согласны ли Вы с Петей? Объясните свой ответ.

Это задание было специфическим образом направлено на оценку понимания того, что доказательство — если каждый из шагов верен — имеет статус заключения, верного с логической необходимостью (см. также [19, 66]).

(2) *Задача про девочку*. Девочка умножает число на 5, затем прибавляет 12. После этого она отнимает первоначальное число и результат делит на 4. Она замечает, что ее ответ больше исходного числа на 3. Она говорит: "Я думаю, что так будет независимо от того, какое число я задумала". Права ли она? Объясните, почему вы так считаете?

Это задание было специфически направлено на оценку умения детей использовать свое понимание логической необходимости и строить формальное доказательство в виде дедуктивного заключения. Задание неоднократно использовалось в работах, проведенных другими исследователями [28].

### КОНТРОЛЬНЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

(1) *Задача про учеников и учителей* (модификация задачи Clement, Lockhead and Monk, 1981).

Напишите уравнение, используя буквы Ш и У, представляющие следующее предложение: "В этой школе в шесть раз больше школьников, чем учителей". Используйте Ш для обозначения числа школьников, а У для обозначения числа учителей.

Для решения этой задачи требуется определенный уровень владения алгеброй, но не требуется понимание логической необходимости. Задача про учеников и учителей часто использовалась в предыдущих исследованиях. Было показано, что, несмотря на кажущуюся простоту, даже учащиеся университетов испытывают трудности при выполнении этого задания, часто путая уравнения  $Ш = 6У$  и  $У = 6Ш$  (см., напр. [5, 10, 20, 24, 34, 57]).

*Процедура исследования*. Задания предъявлялись сотрудникам исследовательской группы во время обычного урока математики. Они были организованы в виде письменной контрольной работы, или теста, на который детям отводилось 90 минут. После теста с детьми проводили интервью, в котором их просили объяснить свои решения каждой задачи. Интервью проходили в школе в отдельной комнате. Тест и интервью кодировались двумя кодировщиками в соответствии с заранее разработанным каталогом.

*Результаты и обсуждение*. Данные были кросс-табулированы (группа\* возраст\* категория ответа) и подвергнуты лог-линейному анализу. Переменная группы имела 4 уровня: (1) российская экспериментальная программа; (2) английская эксперименталь-



ная программа; (3) российская неэкспериментальная программа; и (4) английская неэкспериментальная программа. Переменная возраста имела 2 уровня: (1) младшая группа и (2) старшая группа. Переменная категория ответа имела разное количество уровней для разных категорий, например, (1) использовали доказательство и (2) не использовали доказательство. Переменные группы и возраста выступали как независимые, а категории ответа выступала как зависимая переменная. Категориальная структура данных (все переменные были представлены в шкале наименований) определила выбор адекватного статистического метода – лог-линейного анализа [29].

Такой подход позволяет сравнить различные модели связей между независимыми и зависимыми переменными, описывающие структуру зависимых переменных, и выбрать модель, которая делает это наилучшим образом, используя наименьшее количество независимых переменных и связей между ними. Так, категориально представленные зависимые переменные могут быть описаны как (1) несвязанные с независимыми переменными, (2) связанные с одной или несколькими, (3) со всеми независимыми переменными и (4) связанные со всеми независимыми переменными и взаимодействием между ними (полная модель – fully saturated model). Проведенный анализ позволил нам выбрать подходящие лог-линейные модели, которые хорошо объясняют структуру зависимых переменных; вычислить  $\chi^2$  качества соответствия этих моделей данным (goodness-of-fit),  $\chi^2$  различия между разными моделями ( $L\chi^2$ ), значения  $p$  для моделей и эффектов,  $z$ -показатели для эффектов ( $z \approx \lambda/s.e.$ ) и выраженность эффектов ( $w$ ). Выраженность эффекта подсчитывалась по следующим формулам

$$w = \sqrt{\frac{c^2}{1-c^2}} \quad \text{и} \quad c = \sqrt{\frac{\chi^2}{\chi^2 + N}}$$

Вычисление выраженности эффекта позволило нам не только определить статистическую значимость полученных результатов, но и количественную меру того, насколько сильно независимые переменные группы и возраста связаны с зависимыми переменными, категориями ответов испытуемых.

При решении задачи про Петю дети давали ответы, которые укладывались в три основные категории: (1) я согласен с Петей, конкретные эмпирические примеры нужны, но 100, может быть, слишком много; (2) я не согласен с Петей, потому что конкретные эмпирические примеры ничего не доказывают (или потому что алгебраического доказательства достаточно); (3) другие ответы. Данные о том, какой процент ответов подпадает под каждую категорию, а также примеры ответов каждой категории представлены в табл. 2.

Согласие с Петей указывало на то, что ребенок смешивает доказательство теоремы как истинного с логической необходимостью заключения с индуктивным эмпирическим, возможным утверждением, истинность которого должна быть установлена с помощью многочисленных эмпирических демонстраций. Несогласие с Петей, сопровождающееся адекватным объяснением, интерпретировалось как свидетельство того, что доказательство понимается как логически необходимое заключение. В первом случае дети считали: одного доказательства недостаточно для того, чтобы быть уверенным в том, что правило работает всегда. Верность правила, по их мнению, должна быть продемонстрирована на большом количестве численных примеров. Во втором случае дети считали, что численные примеры не нужны, если доказательство сформулировано в общем виде и его логическая валидность не вызывает сомнений.

Если сравнивают процентный показатель количества детей, которые ответили, что доказательство необходимо продемонстрировать эмпирически, с таким же показателем количества детей, считавших, что одного доказательства достаточно, то окажется: старшие подростки из российской экспериментальной группы лучше, чем дети в остальных группах, понимали, что доказательство представляет собой ло-



Ответы каждой категории и примеры ответов в задаче про Петю (%)

	Нужны эмпирические проверки	Доказательства достаточно	Другие ответы
<i>Младшая группа</i>			
Рос. экспериментальная	8	4	88
Рос. неэкспериментальная	13	0	87
Англ. экспериментальная	67	6	27
Англ. неэкспериментальная	65	0	35
<i>Старшая группа</i>			
Рос. экспериментальная	20	60	20
Рос. неэкспериментальная	18	11	71
Англ. экспериментальная	73	12	16
Англ. неэкспериментальная	55	11	34
Примеры ответов каждой категории	Я считаю, что Петя прав в своих сомнениях. То, что это получается с некоторыми числами, не означает, что получится и с другими	Плохой способ проверки теоремы потому, что это может быть правильно для 100 чисел и не правильно для 101-го (?). Петя дурак, потому, что теорема была доказана аналитически	(1) Я не понял доказательства (2) У Пети проблемы с самооценкой – ему нужно пойти к психотерапевту

гически необходимое заключение. Большинство детей в английских группах считали, что доказательства недостаточно: для уверенности в правильном заключении учителя требуются конкретные численные примеры. Для ответов первой категории (нужны численные примеры) модель зависимости эффектов от переменной группы хорошо объясняет результаты ( $\chi^2(4) = 3,89$ ;  $p = .42$ ;  $L\chi^2(3) = 133,1$ ;  $p < .0001$ ;  $w = .55$ ). Направление эффектов указывает на то, что английские дети чаще, чем российские считают: численные примеры необходимы ( $z = 8,3$ ;  $p < .0001$ ). Дети, которые обучаются по английской экспериментальной программе, больше, чем все другие склонны обращаться к численным примерам ( $z = 2,5$ ;  $p < .01$ ). Данные также говорят о том, что возраст не является существенной переменной в отношении данной категории: ни в одной из групп не наблюдалось возрастной динамики в предпочтении эмпирических численных примеров доказательству в общем виде.

Для ответов второй категории (доказательства достаточно) модель зависимости эффектов от переменных группы и возраста хорошо объясняет результаты ( $\chi^2(3) = 4,63$ ;  $p = .2$ ). Эффекты, связанные с группой, имели умеренную выраженность ( $L\chi^2(3) = 50,1$ ;  $p < .0001$ ;  $w = .33$ ). Эффекты, связанные с возрастом, были сильными ( $\chi^2(2) = 324,4$ ;  $p < .0001$ ;  $w = .87$ ). Направление эффектов говорит о том, что старшие дети, обучающиеся по российской экспериментальной программе, чаще, чем подростки из любой другой группы считали, что доказательства достаточно для того, чтобы быть уверенным: правило работает всегда ( $z = 4,5$ ;  $p < .0001$ ). В российской экс-



Ответы в каждой категории в задаче про девочку (%)

	Использовалось алгебраическое доказательство	Другой ответ
<i>Младшая группа</i>		
Рос. экспериментальная	19	81
Рос. неэкспериментальная	11	89
Англ. экспериментальная	19	99
Англ. неэкспериментальная	19	99
<i>Старшая группа</i>		
Рос. экспериментальная	69	31
Рос. неэкспериментальная	41	59
Англ. экспериментальная	9	91
Англ. неэкспериментальная	2	98

Таблица 4

Дети, написавшие правильное уравнение в задаче про школьников и учителей (%)

	Младшая группа	Старшая группа
Рос. экспериментальная	60	83
Англ. экспериментальная	63	60
Рос. неэкспериментальная	20	53
Англ. экспериментальная	11	28

периментальной группе понимание логической необходимости росло с возрастом ( $z = 10,6$ ;  $p < .0001$ ), в то время как у детей других групп такого роста не наблюдалось.

В решениях детьми задачи про девочку ответы делились на две категории: (1) ответы, содержащие алгебраическое рассуждение (доказательство), и (2) другие ответы (напр., отсутствие ответа или использование только численных примеров). Данные о том, какой процент ответов подпадает под каждую категорию, а также примеры ответов каждой категории представлены в табл. 3.

В решениях детьми задачи про девочку модель зависимости эффектов от переменных группы и возраста хорошо объясняет результаты ( $\chi^2(3) = 1.05$ ;  $p = .71$ ). Эффекты, связанные с переменной группы были сильно выражены ( $L\chi^2(3) = 115,2$ ;  $p < .0001$ ;  $w = .51$ ). Эффекты, связанные с возрастом, были умеренно выраженными ( $L\chi^2(3) = 86$ ;  $p < .0001$ ;  $w = .44$ ). Данные свидетельствуют о том, что старшие дети из российской экспериментальной группы чаще, чем в других группах, используют алгебраическое рассуждение при решении этой задачи ( $z = 4,5$ ;  $p < .0001$ ); и, в целом, дети в российских группах более склонны использовать доказательство, чем в английских группах ( $z = 6,8$ ;  $p < .00001$ ). Эта способность российских детей существенно увеличивалась с возрастом ( $z = 12,4$ ;  $p < .000001$ ). В российской экспериментальной группе наблюдалась наиболее сильная возрастная динамика: в старшей группе доказательство использовали 69% детей, в то время, как в младшей группе его использовали только 19%. В то же время в английских группах наблюдалась лишь минимальная возрастная динамика (от 1% до 9%) в отношении использования алгебраического доказательства.

В то время, как задания, требовавшие понимания логической необходимости, выявили существенные различия между группами, контрольное задание, не требовавшее понимания логической необходимости (задача про школьников и учителей), таких различий не выявило. В табл. 4 представлены сравнительные данные о коли-



честве детей, написавших уравнение в ответе на задачу про студентов и профессоров и давших другие ответы.

Прежде всего, более 50% детей, обучающихся по экспериментальным программам, правильно решили эту задачу (95 процентный доверительный интервал составляют 51–74% для английской группы и 59–80% для российской). Различия в большей степени проявились в неэкспериментальных группах. Полная модель наилучшим образом объясняет данные. Эффекты, связанные с возрастом, были умеренно выражены ( $L\chi^2(3) = 77$ ;  $p < .0001$ ;  $w = .41$ ), также, как и эффекты, связанные с переменной группы ( $L\chi^2(3) = 70$ ;  $p < .0001$ ;  $w = .39$ ), в то время как эффекты, связанные с взаимодействием переменных группы и возраста, были небольшие ( $\chi^2(3) = 8$ ;  $p < .001$ ;  $w = .13$ ). Хотя эффекты переменных групп были существенны, они объясняли в основном различия между российской и английской неэкспериментальными группами.

Результаты данного исследования указывают на то, что при изучении алгебры дети из старшей российской экспериментальной группы более склонны понимать доказательство как логически необходимое заключение, использовать это понимание в решении алгебраических задач и строить дедуктивное алгебраическое рассуждение, чем дети из любой другой группы. Английские дети чаще смешивают логическую необходимую и эмпирически возможную истину, считают, что логически необходимые выводы требуют конкретных эмпирических примеров. Тем не менее, обе группы продемонстрировали относительно высокую успешность выполнения контрольного задания: более 50% детей в российской и английской группах правильно решили задачу.

В российской экспериментальной группе наблюдалась более выраженная положительная динамика в понимании логической необходимости, чем у детей из английской экспериментальной группы.

Высокий показатель смешения логически необходимых и эмпирически верных утверждений у детей, не прошедших специально организованного обучения по формированию представления о метакомпонентах алгебраического дедуктивного рассуждения, отсутствие у этих детей положительной возрастной динамики в понимании логической необходимости, а также близкие результаты выполнения контрольных задач, позволяють предположить, что дети, не прошедшие специального обучения, либо не различают логически необходимые и эмпирически верные суждения, либо не применяют это различие при решении конкретных мыслительных задач. Чтобы проверить возможность переноса понимания логической необходимости в область построения вербального рассуждения, было проведено второе исследование.

Исследование 2: понимание детьми логической необходимости в области построения вербальных рассуждений.

**Методика.** Как и в первом исследовании (испытуемые те же), методики исследования были направлены на сравнение успешности выполнения детьми заданий, требовавших и не требовавших понимания логической необходимости. Задания были подготовлены на английском и затем переведены на русский язык. После обратного перевода в русский вариант заданий были внесены необходимые изменения. В этом исследовании оценивалась успешность построения детьми вербальных дедуктивных рассуждений.

Для исследования понимания логической необходимости, было разработано специальное задание. Оно состояло из силлогизма, в котором валидное, логически необходимое заключение было эмпирически ложным. Задания, которые требовали не понимания логической необходимости, а лишь умения совершать логические трансформации, представляли собой различные вербальные силлогизмы.

**Задачи, требующие понимания логической необходимости.** В следующем задании заключен конфликт между логически валидным и эмпирически истинным выводами.

(1) *Композитное число.* Детям предлагалось задание со следующей инструкцией: "Представьте себе, что первые два предложения истинны. Сделайте заключение, используя оба предложения. Выберите ответы из вариантов 1, 2, 3 или 4".



Все композитные числа делятся на 8 без остатка. 26 – композитное число. Следовательно:

- 1) Должно быть, 26 – не композитное число.
- 2) 26 – исключение из правила.
- 3) 26 делится без остатка на 8.
- 4) Наверное, не все композитные числа делятся без остатка на 8.

В то время, как заключение "26 делится без остатка на 8" эмпирически неверно, оно логически следует из посылок и обладает статусом логически необходимого вывода из данных посылок.

**Контрольные задания.** Задания были заимствованы из [67]. Детям предъявлялись три силлогизма. Они различались по форме посылок (положительная/отрицательная, универсальная/частная) и валидности заключения (верное-неверное). Ко всем этим заданиям давалась следующая инструкция: "Пожалуйста, определите, правильные ли заключения сделаны из следующих предложений. Все эти предложения утверждают нелепости, но Вы, пожалуйста, сосредоточьтесь на логической правильности рассуждения. Обведите ДА, если заключение правильное, и НЕТ, если заключение неправильное".

(1) *Положительно-универсальный силлогизм с валидным заключением.* Если у всех птиц хвосты, а все кошки – птицы, то у всех кошек розовые хвосты.

(2) *Положительно-частный силлогизм с валидным заключением.* Если некоторые люди розового цвета, а все, что имеет розовый цвет является лошадью, то некоторые лошади – люди.

(3) *Отрицательно-универсальный силлогизм с невалидным заключением.* Если у коров не бывает зеленых копыт, а все коровы – свиньи, то у свиней не бывает зеленых копыт.

Процедура исследования была той же самой, что и в предыдущем исследовании.

## РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Данные были кросс-табулированы (группа\* возраст\* категория ответа) и подвергнуты лог-линейному анализу. Он позволил нам подобрать подходящие лог-линейные модели, которые хорошо объясняют результаты; определить  $\chi^2$  качества соответствия этих моделей данным,  $\chi^2$  различия между разными моделями ( $L\chi^2$ ), значения  $p$  для моделей и эффектов, направления эффектов,  $z$ -показатели для эффектов ( $z \approx \lambda/s.e.$ ) и выраженность эффекта ( $w$ ). Процентные соотношения числа детей, которые правильно построили вербальные рассуждения, представлены в табл. 5.

Данные свидетельствуют о том, что форма силлогизма влияет на успешность выполнения задания: дети успешнее рассуждают в положительно-универсальных силлогизмах, чем в силлогизмах других типов. Другие переменные не влияли на успешность рассуждения в контрольных заданиях: дети из российской и английской экспериментальных групп сходно выполняли контрольные задания. Ни в одной из групп выполнение контрольных заданий не улучшалось с возрастом. В то же время результаты задания с композитным числом резко отличались от результатов выполнения контрольных заданий. Во-первых, старшие дети из российской экспериментальной группы выполняли их лучше, чем дети во всех остальных старших группах ( $z = 3.3$ ;  $p < .0001$ ). Во-вторых, дети из российской экспериментальной группы обнаружили положительную возрастную динамику: старшие дети выполняли это задание существенно лучше, чем младшие ( $z = 4.6$ ;  $p < .00001$ ). В-третьих, возрастной динамики не обнаружилось в других группах, где старшие и младшие дети примерно одинаково выполняли задание с композитным числом.

Результаты второго исследования указывают на то, что в области построения вербальных рассуждений (построение таких рассуждений не изучается в школе)



## Дети, давшие правильные ответы в задачах на построение вербального рассуждения (%)

	Компо- зитное число	Положи- тельно- универ- сальный силло- гизм	Положи- тельно- частный силло- гизм	Негатив- но- универ- сальный силло- гизм
<i>Младшая группа</i>				
Рос. экспериментальная	3	71	35	32
Рос. неэкспериментальная	9	44	56	24
Англ. экспериментальная	19	78	43	34
Англ. неэкспериментальная	14	91	37	20
<i>Старшая группа</i>				
Рос. экспериментальная	30	86	51	47
Рос. неэкспериментальная	12	74	32	9
Англ. экспериментальная	19	91	35	35
Англ. неэкспериментальная	9	86	44	27

старшие дети из российской экспериментальной группы демонстрировали более успешное выполнение заданий, в которых требовалось понимание логической необходимости, чем дети других групп. В то же время, по уровню выполнения контрольных заданий между российской и английской экспериментальными группами не было выявлено значимых различий. Эти результаты говорят о том, что дети, которые не прошли специальной подготовки по формированию представления о метакомпонентах алгебраического дедуктивного рассуждения, были более склонны смешивать валидные, логически необходимые и эмпирически верные заключения, чем те, кто прошел такую подготовку.

Как было предположено в первой, второй и третьей гипотезах, дети, у которых специально формировались представления о метакомпонентах алгебраического дедуктивного рассуждения, на самом деле лучше других детей выполняли задания, требовавшие понимания логической необходимости. Во всех заданиях были зафиксированы сильные эффекты, связанные с переменными группы и/или возраста. Эффекты варьирования по своей силе от умеренно выраженных до сильных.

При решении про Петю 60% старших детей из российской экспериментальной группы решили, что доказательства достаточно, в то время как в других группах таких ответов было только 11–12%. В то же время 55–73% детей из английских групп считало, что численные примеры необходимы для того, чтобы быть уверенным в правильности теоремы.

Наблюдались также значительные различия между детьми в отношении понимания своего понимания логической необходимости при решении мыслительных задач. При решении задачи про девочку дети из российской экспериментальной группы были значительно более успешны, чем дети из любой другой группы. Дети, прошедшие специальное обучение, формирующее представления о метакомпонентах алгебраического дедуктивного рассуждения, обнаружили положительную возрастную динамику в понимании логической необходимости. В то же время у детей, не прошедших такого обучения, никакой возрастной динамики не наблюдалось. Было выявлено также, что, в целом, в российских группах дети лучше использовали свое понимание логической необходимости в решении задач, и это использование увеличивалось с возрастом детей, чего не наблюдалось в английских группах. Поскольку дети в российских группах решали задачи лучше, чем в других группах, а ребята в российской экспериментальной группе делали это лучше, чем их сверстники в российской неэкспериментальной группе, то можно предположить комбинацию



влияния факторов культуры и программы обучения на успешность применения детьми алгебраического рассуждения при решении конкретных мыслительных задач. В то же время, результаты выполнения контрольного задания детьми в российской и английской экспериментальных группах не обнаружили существенных межгрупповых различий.

В четвертой гипотезе предсказывалось, что дети могут переносить свое внимание логической необходимости из алгебры в область вербальных рассуждений. В самом деле, данные говорят о том, что в задании, где требовалось понимание логической необходимости, старшие дети из российской экспериментальной группы показывали лучшие результаты, чем в других группах. Более того, эти показатели значительно улучшались с возрастом только в российской экспериментальной группе. Вместе с тем, контрольные задания не обнаружили различий между испытуемыми из разных групп.

Гипотезы были основаны на имплицитном допущении, что различия в понимании логической необходимости могут быть атрибутированы программе обучения. Данные в большой степени подтверждают это допущение. Во-первых, ничто не указывает на то, что результаты зависели только от кросскультурных различий (английские/российские группы). Во-вторых, различия между российской экспериментальной группой и другими группами увеличивались с возрастом детей в тех заданиях, которые требовали понимания логической необходимости. Тем не менее, проведенное исследование не может полностью исключить возможных альтернативных объяснений. Например, выявленные различия могли бы быть объяснены разницей в уровнях интеллектуального развития детей в исследованных группах. Для рассмотрения и исключения возможных альтернативных объяснений необходимы дальнейшие исследования с более строгим контролем потенциально значимых переменных.

#### Предварительные выводы

1. Дети, не прошедшие специального обучения, направленного на формирование представлений о метакомпонентах алгебраического дедуктивного рассуждения, чаще совершают ошибки при построении рассуждений в заданиях, требующих понимания логической необходимости.

2. Дети, прошедшие данное обучение, демонстрируют лучшее понимание логической необходимости и умение применять его в задачах на построение алгебраического рассуждения, чем дети, не прошедшие такой подготовки.

3. Различия в понимании логической необходимости между детьми, прошедшими специальное обучение, направленное на формирование представлений о метакомпонентах алгебраического дедуктивного рассуждения, и остальными детьми, увеличиваются с возрастом.

4. Понимание логической необходимости может быть перенесено из области алгебраических рассуждений в область вербальных рассуждений.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Выготский Л.С.* Мышление и речь. М., Педагогика. 1956.
2. *Давыдов В.В.* Виды обобщения в обучении. 1972.
3. *Эльконин Д.Б.* Детская психология. 1960.
4. *Bell A.W.* A study of pupil's proof-explanation in mathematical situations // *Educational Studies in Mathematics*. 1976. V. 7. P. 23-40.
5. *Bernardo A., Okagaki L.* Roles of symbolic knowledge and problem-information context in solving word problems // *Journal of Educational Psychology* 1994. V. 86. (2) P. 212-220.
6. *Braine M.* The "natural logic" approach to reasoning // *Reasoning, necessity and logic: Development perspectives* / Ed. W. Overton. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum, 1990. P. 111-132.
7. *Braine M.D., Rumain B.* Logical reasoning / Ed. J. Flavell and E. Markman, *Handbook of child psychology. Cognitive Development*. New York: John Wiley. 1983. V. 3.
8. *Carnap R.* Philosophical foundations of physics: An introduction to the philosophy of science. New York, NY: Basic Books, 1966.



9. Chapman M., Skinner E., Baltes P. Interpreting correlations between children's perceived control and cognitive performance: Control, agency, or means-ends beliefs? // *Development Psychology*. 1990. V. 26 (2). P. 246-253.
10. Clement J., Lockhead J., Monk G. Translation difficulties in learning mathematics // *American Mathematics Monthly*. 1981. V. 88. P. 286-290.
11. Davydov V. An experiment in introducing elements of algebra in elementary school. *Soviet Education*. 1962. V. (1). P. 27-75.
12. Davydov V. The psychological characteristics of the "prenumeral" period in mathematics instruction. / Ed. L.P. Steffe. *Soviet studies in the psychology of learning and teaching mathematics*. Chicago: University of Chicago Press, 1975. V. 7. P. 109-1206.
13. Davydov V. Types of generalization in instruction: Logical and psychological problems in the structuring of school curricula // *Soviet Studies in Mathematics Education*. Reston, VA.: NCTM. 1990. V. 2.
14. Evans J.St. Bias in human reasoning: Causes and consequences. Hove, UK: Lawrence Erlbaum. 1989.
15. Evans J.St. The psychology of deductive reasoning. London: Routledge and Kegan Paul. 1982.
16. Evans J.St. B.T., Barston J.L., Pollard P. On the conflict between logic and belief in syllogistic reasoning // *Memory and Cognition*. 1983. V. 1. P. 295-306.
17. Evans J., Newstead S., Byrne R. Human reasoning: The psychology of deduction. Hove, UK: Lawrence Erlbaum. 1993.
18. Evans J., Pollard P. Belief bias and problem complexity in deductive reasoning // Ed. J.P. Caverni, J.M. Fabre, M. Gonzalez. *Cognitive biases*. Amsterdam: North-Holland. 1990. V. 131-154.
19. Fischbein E., Kedem I. Proof and certitude in the development of mathematical thinking / Ed. A. Vermandel. *Proceedings of the Sixth International Conference for the Psychology of Mathematics Education Antwerpen*, 1982. P. 128-131.
20. Fisher F.E. The students-and-professors problem revisited // *Journal for research in Mathematics Education*. 1990. V. 2 (3). P. 260-262.
21. Gigerenzer G., Murray D. Cognition as intuitive statistics. Hilldale, N.J: Lawrence Erlbaum. 1987.
22. Girotto V., Light P., Colbourn C. Pragmatic schemas and conditional reasoning in children // *The Quarterly Journal of Experimental Psychology*. 1988. V. 40A. (3). P. 469-482.
23. Harper E., Keschman D., Mahoney M., Marshall S., Martin E., McLay H., Reed P., Russel S. National Mathematics Project: Mathematics for secondary schools. Red Track: Books 1-5. London: Longman. 1987.
24. Hegarty M., Mayer R., Green C. Comprehension of arithmetic word problems: Evidence from student's eye fixations // *Journal of Educational Psychology*. 1992. V. 84. P. 76-84.
25. Hess R., Azuma H., Kashiwagi K., Dickson W.P., Holloway S., Miyake K., Price G.G., Hatano G., McDevitt T. Family influences on school readiness and achievement in Japan and the United States: an overview of a longitudinal study // / Eds. H. Stevenson, H. Azuma, K. Hakuta // *Child development and education in Japan* New York: Freeman. 1986. P. 147-166.
26. Inhelder B., Piaget J. The growth of logical thinking from childhood to adolescence. New York: Basic Books. 1958.
27. Johnson-Laird P., Byrne R.M. Deduction. Hove, UK: Lawrence Erlbaum. 1991.
28. Lee L., Wheeler D. The arithmetic connection // *Educational Studies in Mathematics*. 1989. V. 20. P. 41-54.
29. Kennedy J. Analysing qualitative data: Log-linear analysis for behavioral research. New York: Praeger. 1992.
30. Komatsy L., Galotti K. Children's reasoning about social, physical and logical regularities: A look at two worlds // *Child Development*. 1986. V. 57. (2). P. 413-420.
31. Kuhn D. Conditional reasoning in children // *Developmental Psychology*. 1977. V. 13 (4). P. 342-353.
32. Markman H. Empirical versus logical solutions to part-whole comparison problems concerning classes and collections // *Child Development*. 1978. V. 48. P. 1521-1531.
33. Markovits H., Nantel G. The belief bias effect in the production and evaluation of logical conclusions // *Memory and Cognition*. 1989. V. 17. P. 11-17.
34. Mestre J.P. The role of language comprehension in mathematics and problem solving / Eds. R. Cocking, J. Mestre. *Linguistic and cultural influences on learning mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum. 1988. P. 201-220.
35. Miller S.A., Seier W., Nassau G. Children's understanding of logically necessary truths. Paper



- presented at the Biennial Meeting of The Society for Research In Child Development, Indianapolis, IN. 1995.
36. *Morris A.* Development of algebraic reasoning in children and adolescents: Cultural, Curricular and age-related effects. Unpublished doctoral dissertation. Ohio State University. 1995.
  37. *Morris A., Sloutsky V.* Cognitive tools of higher order thinking: A crosscultural analysis of children's use of algebraic symbols. Paper presented at the SCRD Biennial Meeting. Indianapolis, IN. 1995. April.
  38. *Moshman D.* Reasoning as self-constrained thinking // *Human Development*. 1995. V. 38. P. 53–64.
  39. *Moshman D.* The development of metalogical understanding / Ed. W. Overton. Reasoning, necessity and logic: Developmental perspectives. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, 1990. P. 205–226.
  40. *Moshman D., Timmons M.* The construction of logical necessity // *Human Development*. 1982. V. 25. P. 309–33.
  41. *Moshman D., Franks B.* Development of the concept of inferential validity // *Child Development*. 1986. V. 57 (1). P. 153–165.
  42. *Murphey D.* Constructing the child: Relations between parent's beliefs and child's outcomes. // *Developmental Review*. 1992. V. 12. P. 199–232.
  43. *Nisbett R., Fong J., Lehman D., Cheng P.* Teaching reasoning // *Science*. 1987. V. 238. P. 625–631.
  44. *Oakhill J., Garnham A.* On theories of belief bias in syllogistic reasoning // *Cognition*. 1993. V. 46. P. 87–92.
  45. *Oakhill J., Johnson-Laird P.N.* The effect of belief on the spontaneous production of syllogistic conclusions // *Quarterly Journal of Experimental Psychology*. 1985. V. 37A. P. 553–570.
  46. *Oakhill J., Johnson-Laird P.N., Garnham A.* Believability and syllogistic reasoning // *Cognition*. 1989. V. 31. P. 117–140.
  47. *Okagaki L., Sternberg R.J.* Parental beliefs and children's school performance // *Child Development*. 1993. V. 64. P. 36–56.
  48. *Osherson D.* Logical ability in children, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum. 1976. V. 1–4.
  49. *Osterson D., Markman E.* Language and the ability to evaluate contradictions and tautologies // *Cognition*. 1975. V. 3. P. 213–226.
  50. *Overton W.* Competence and procedures: Constraints of the development of logical reasoning / Ed. W. Overton Reasoning, necessity and logic: Developmental perspectives, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum. 1990. P. 1–32.
  51. *Quine W.V.* From a logical point of view. Cansbridge, MA: Harvard University Press, 1953.
  52. *Piaget J.* Logic and psychology. Manchester, UK: Manchester University Press. 1953.
  53. *Piaget J.* Essay on necessity. // *Human development*. 1986. V. 29. P. 301–314.
  54. *Piaget J.* Possibility and necessity. Minneapolis, MN. University of Minnesota Press. 1987. V. 1–2.
  55. *Polk T., Newell A.* Deduction as verbal reasoning // *Psychological Review*. 1995. V. 102. (3). P. 533–566.
  56. *Ross L., Anderson C.* Shortconnings in the attribution process: On the origins and maintenance of erroneous social assessments / Ed. D. Kahneman, P. Slovic, A. Tversky. Judgement under uncertainty: Heuristics and biases. Cambridge. 1982. P. 3–20.
  57. *Schoenfeld A.* Explorations of students' mathematics beliefs and behavior // *Journal of Research in Mathematics Education*. 1989. V. 2. (4). P. 338–355.
  58. *Sloutsky V., Morris A.* Development of mathematical reasoning in adolescence: A cross-cultural perspective. Paper presented at the Annual Corrvention of the Americal Psychological Association. New York, NY. 1995 August.
  59. *Sloutsky V., Morris A.* Belief bias across reasoning contexts. Manuscript submitted to *Cognitive Psychology*. 1995b.
  60. *Smith L.* Necessary knowledge: Piagetian perspectives on constructivism. Hove, England. Lawrence Erlbaum Associates. 1993.
  61. *Sternberg R.J.* Reasoning, problem solving, and intelligence / Ed. R. Sternberg. Handbook of human intelligence. N.Y: Cambridge University Press. 1982. P. 225–307.
  62. *Sternberg R.J.* Toward a triarchic theory of human intelligence // *The Behavioral and Brain Science*. 1984. V. 7 (2). P. 269–315.
  63. *Thorndike E.L.* Human learning. Cambridge, MA: M.I.T. Press, 1966.
  64. *Tulviste P.* On the origins of theoretical syllogistic reasoning in culture and in the child // *Tartu Rikliku Ulkooli Toimelised Trudy pu Psikhologii*. 1978. N 474. P. 3–22.



65. USSR Academy of Pedagogical Sciences' Scientific Research Institute of Curriculum and Teaching Methods. The mathematics curriculum for secondary general education schools (grades five through eleven) // Soviet Education. 1987. V. 29. (3). P. 56–108.
66. Vinner S. The notion of proof – Some aspects of student's views at the senior high level / Ed. R. Hershkowitz. Proceedings in the Seventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education. Rehovot, Israel: Weizmann Institute of Science. 1983. P. 289–294.
67. Wilson J., Cahen L., Begle E. National Longitudinal Study of Mathematics Ability Reports. Board of Trustees of Stanford University. 1966. N 2. P. B.
68. Wittgenstein L. Tractatus logico-philosophicus. London: Routledge and Kegan Paul. 1922.

## ОБУЧАЮЩАЯ СИСТЕМА «ПРАКТИКА»

КОМПЛЕКТ ПРОГРАММНЫХ СРЕДСТВ ДЛЯ СОПРОВОЖДЕНИЯ КУРСА ОБЩЕЙ ПСИХОЛОГИИ

Система «ПРАКТИКА» обеспечивает самостоятельную работу студентов по следующим курсам: “Ощущение и восприятие”, “Внимание”, “Память”, “Мышление”. Система позволяет назначать каждому студенту индивидуальный набор учебных заданий и контролировать качество их выполнения. В комплект входят более 40 демонстрационных и экспериментальных методик, например, “Методы измерения порогов”, “Иллюзии восприятия”, “Корректирующая проба”, “Дихотический тест” (варианты Бродбента, Трейсмана и Черри), методика формирования понятий (Выготский, Сахаров) и многие другие.

### Дополнительные программно-технические средства:

- **Стиммейкер** - программа-конструктор для разработки и проведения психологических экспериментов, требующих сложной, нестандартной стимуляции. Программа обеспечивает синхронизацию ответов испытуемого с его электрофизиологическими показателям (ЧСС, КГР, ЭЭГ, ВП).
- **Портативный компьютерный прибор для регистрации и анализа КГР.**

Приглашаем к сотрудничеству разработчиков психодиагностических методик.

**Наш адрес:** Факультет психологии МГУ, Центр Прикладной Психологии и Психофизиологии. 103009, Москва, Большая Никитская, 4. , к. 56а.  
Тел.: (095) 203-3571 Факс: (095) 203-3565  
E-mail: gusev@gusev.ps.msu.su